

대학수학능력시험 기출 모의평가

미적분2

정답 및 해설

1	㉓	2	㉓	3	㉓	4	㉓	5	㉓
6	㉓	7	㉓	8	㉓	9	㉓	10	㉓
11	㉓	12	㉓	13	㉓	14	㉓	15	㉓
16	㉓	17	15	18	2	19	12	20	134
21	457	22	17	23	11	24	12	25	977
26	180	27	16	28	31	29	11	30	31

1. 정답 ㉓

[출제 주제] 여러 가지 함수의 미분

[1단계]

 $x \rightarrow 0$ 일 때 사용할 기본 극한을 확인한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= 1$$

[2단계]

분자와 분모를 각각 x 로 나누어 정리한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{e^{2x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 6x}{x}}{\frac{e^{2x} - 1}{x}}$$

[3단계]

분자와 분모의 극한을 각각 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{6x} \times 6$$

$$= 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2$$

$$= 2$$

[4단계]

두 값을 나눈다.

$$\frac{6}{2} = 3$$

따라서 정답은 ㉓이다.

2. 정답 ㉓

[출제 주제] 여러 가지 함수의 미분

[1단계]

$$\text{주어진 식을 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \text{의 꼴을 이용할 수}$$

있도록 변형한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 6x}{6x} \cdot \frac{6x}{2x} \right)$$

[2단계]

극한의 성질을 이용하여 값을 계산한다.

$$x \rightarrow 0 \text{ 일 때 } 6x \rightarrow 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{6x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 6x}{6x} \cdot 3 \right)$$

$$= 1 \cdot 3$$

$$= 3$$

따라서 정답은 ㉓이다.

3. 정답 ㉓

[출제 주제] 순열과 조합

[1단계]

서로 다른 4 개의 문자에서 중복을 허락하여 3 개를 택해

일렬로 나열하는 것이므로 중복순열의 수와 같다.

구하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3$

[2단계]

중복순열의 계산은 다음과 같다.

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

따라서 정답은 ㉓이다.

4. 정답 ㉓

[출제 주제] 벡터의 성분과 내적

[1단계]

 $\vec{2b}$ 를 성분으로 구한다.

$$\vec{2b} = 2(1, 1) = (2, 2)$$

[2단계]

두 벡터의 합을 성분끼리 더한다.

$$\vec{a} + \vec{2b} = (-1, 2) + (2, 2) = (-1 + 2, 2 + 2) = (1, 4)$$

[3단계]

모든 성분의 합을 구한다.

$$1 + 4 = 5$$

따라서 정답은 ㉓이다.

5. 정답 ㉓

[출제 주제] 함수의 연속

[1단계]

함수 $f(x)$ 는 $x < 1$ 과 $x \geq 1$ 에서 각각

다항함수이므로 연속이다.

따라서 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x = 1$ 에서

연속이어야 한다.

즉, $x = 1$ 에서의 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두

같아야 한다.

[2단계]

 $x = 1$ 에서의 좌극한을 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 2)$$

$$= 3 \cdot 1 - 2$$

$$= 1$$

 $x = 1$ 에서의 우극한과 함숫값을 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$= 1^2 - 3 \cdot 1 + a$$

$$= a - 2$$

[3단계]

 $x = 1$ 에서 연속이므로 좌극한과 우극한이 같아야 한다.

$$a - 2 = 1$$

$$a = 3$$

따라서 정답은 ㉓이다.

6. 정답 ㉓

[출제 주제] 복소수와 이차방정식

[1단계]

계수가 실수인 이차방정식이 허근을 가지므로 두 허근은

서로 켈레복소수이다.

 $\alpha = p + qi, \beta = p - qi$ (p, q 는 실수, $q \neq 0$)로 놓으면 근과

계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = 2p = 6$$

$$p = 3$$

[2단계]

주어진 조건 $\alpha i + \beta = 0$ 에 대입하면

$$\alpha i = (p + qi)i = -q + pi$$

$$\alpha i + \beta = (-q + p) + (p - q)i = 0$$

복소수가 0 이려면 실수부와 허수부가 모두 0 이어야 하므로

$$p - q = 0$$

$$q = p = 3$$

[3단계]

근과 계수의 관계에서

$$k = \alpha\beta = (3 + 3i)(3 - 3i) = 9 + 9 = 18$$

이때 판별식은 $36 - 4 \cdot 18 = -36 < 0$ 이므로 서로 다른 두

허근을 가진다는 조건을 만족한다.

따라서 정답은 ㉓이다.

7. 정답 ㉓

[출제 주제] 여러 가지 미분법

[1단계]

매개변수로 나타낸 곡선에서 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 를 이용하기 위해

각각을 t 에 대하여 미분한다.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \cos t$$
$$\frac{dy}{dt} = 4 \sin t + 4 \sin t \cos t = 4 \sin t (1 + \cos t)$$

[2단계]

$$t = \frac{\pi}{3} \text{을 대입한다.}$$
$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{dy}{dt} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3\sqrt{3}$$

[3단계]

두 값을 나누어 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{3}$$

따라서 정답은 ④이다.

8. 정답 ③

[출제 주제] 수열의 극한

[1단계]

주어진 극한을 $\frac{a_n}{n}$ 이 드러나도록 변형한다.

$$\frac{(2n+3)a_n}{n^2} = \frac{2n+3}{n} \cdot \frac{a_n}{n}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n} = 2 \text{이므로}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{3}{2}$$

[2단계]

구하는 식도 같은 꼴로 나눈다.

$$\frac{na_n}{3n^2+1} = \frac{a_n}{n} \cdot \frac{n^2}{3n^2+1}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$$

[3단계]

두 극한값을 곱한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{3n^2+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{2}$$

따라서 정답은 ③이다.

9. 정답 ③

[출제 주제] 수열의 극한

[1단계]

주어진 부등식의 각 변을 n 으로 나눈다.

$$\frac{\sqrt{9n^2-5}+2n}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{5n+1}{n}$$

$$\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2 < \frac{a_n}{n} < 5+\frac{1}{n}$$

[2단계]

양 끝의 극한을 구한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2 \right) = 3+2=5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5+\frac{1}{n} \right) = 5$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 5$

[3단계]

구하는 식의 분모와 분자를 각각 n^2 으로 나눈다.

$$\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}$$
$$= \frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n}+5-\frac{2}{n^2}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2} = \frac{(5+0)^2}{5+5-0}$$
$$= \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

따라서 정답은 ③이다.

10. 정답 ③

[출제 주제] 수열의 극한

[1단계]

분자를 유리화하면

$$\sqrt{a_n^2+2n}-a_n$$
$$= \frac{(\sqrt{a_n^2+2n}-a_n)(\sqrt{a_n^2+2n}+a_n)}{\sqrt{a_n^2+2n}+a_n}$$
$$= \frac{2n}{\sqrt{a_n^2+2n}+a_n}$$

[2단계]

공차를 d 라 하면 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = d$

극한값이 0이 아닌 유한한 값이므로 $d > 0$ 이고, 분모와

분자를 n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{a_n^2+2n}+a_n}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{2}{n}}+\frac{a_n}{n}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{d^2+d}} = \frac{2}{2d} = \frac{1}{d}$$

[3단계]

따라서 $\frac{1}{d} = \frac{1}{3}$ 이므로 $d = 3$

따라서 정답은 ③이다.

11. 정답 ②

[출제 주제] 여러 가지 미분법

[1단계]

역함수의 미분법을 이용해 조건을 정리한다.

$$f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} + 4e^x$$

$$g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))} = \frac{1}{8}$$

이므로 $f'(g(a)) = 8$

[2단계]

$$g(a) = k \text{ 라 하면 } f'(k) = 8 \text{이므로 } e^k = t (t > 0) \text{로 두면}$$
$$3t^3 - 6t^2 + 4t = 8$$
$$3t^3 - 6t^2 + 4t - 8 = 0$$
$$(t-2)(3t^2+4) = 0$$
$$3t^2+4 > 0 \text{이므로 } t = 2, \text{ 즉 } e^k = 2$$

[3단계]

$$g(a) = k \text{이므로 } a = f(k) \text{이고, } e^k = 2 \text{를 대입한다.}$$

$$a = e^{3k} - 3e^{2k} + 4e^k = 8 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 4$$

$$a + f'(g(a)) = 4 + 8 = 12$$

따라서 정답은 ②이다.

12. 정답 ④

[출제 주제] 확률분포

[1단계]

확률질량함수의 성질에 의해 확률의 총합은 1이므로 a 의 값을 구할 수 있다.

$$\sum_{x=0}^4 P(X=x)$$
$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) +$$
$$= \frac{|-1|}{12} + \frac{|1|}{12} + \frac{|3|}{12} + \frac{|5|}{12} + a$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + a$$
$$= \frac{10}{12} + a$$
$$= \frac{5}{6} + a$$

확률의 총합이 1이므로

$$\frac{5}{6} + a = 1$$
$$a = \frac{1}{6}$$

[2단계]

확률변수 X 의 기댓값 $E(X)$ 와 분산 $V(X)$ 를 구한다.

$$E(X) = \sum_{x=0}^4 xP(X=x)$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{12}$$
$$+ 2 \cdot \frac{3}{12} + 3 \cdot \frac{5}{12} + 4 \cdot \frac{2}{12}$$
$$= \frac{0+1+6+15+8}{12}$$
$$= \frac{30}{12}$$
$$= \frac{5}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^4 x^2P(X=x)$$

$$\begin{aligned}
&= 0^2 \cdot \frac{1}{12} + 1^2 \cdot \frac{1}{12} \\
&+ 2^2 \cdot \frac{3}{12} + 3^2 \cdot \frac{5}{12} + 4^2 \cdot \frac{2}{12} \\
&= \frac{0 + 1 + 12 + 45 + 32}{12} \\
&= \frac{90}{12} \\
&= \frac{15}{2} \\
V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\
&= \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\
&= \frac{30}{4} - \frac{25}{4} \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

[3단계]

$$a = \frac{1}{6}$$

이므로 구하는 값은 $V(6X)$

분산의 성질에 의해

$$\begin{aligned}
V(6X) &= 6^2 V(X) \\
&= 36 \cdot \frac{5}{4} \\
&= 45
\end{aligned}$$

따라서 정답은 ㉔이다.

13. 정답 ㉔
[출제 주제] 여러 가지 미분법

[1단계]

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하여 $f(0)$ 의 값을 구한다.

$$e^{2f(0)} - e^{f(0)} - 2 = 0$$

$$e^{f(0)} = t$$

로 놓으면 $t > 0$ 이고

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t - 2)(t + 1) = 0$$

$$t > 0$$

이므로 $t = 2$, 즉 $e^{f(0)} = 2$ 이고 $f(0) = \ln 2$

[2단계]

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분한다.

$$2f'(x)e^{2f(x)} - 2f'(2x)e^{f(2x)} - 6e^{3x} = 0$$

여기에 $x = 0$ 을 대입하면 $e^{2f(0)} = 4, e^{f(0)} = 2$ 이므로

$$2f'(0) \cdot 4 - 2f'(0) \cdot 2 - 6 = 0$$

$$8f'(0) - 4f'(0) = 6$$

$$4f'(0) = 6$$

$$f'(0) = \frac{3}{2}$$

[3단계]

g 는 f 의 역함수이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

따라서 정답은 ㉔이다.

14. 정답 ㉔
[출제 주제] 도함수의 활용

[1단계]

직선 $y = 5$ 가 곡선 $y = f(x)$ 에 접한다는 것은 $f(x) = 5$ 가 중근(접점)을 갖는다는 의미이다.

곡선의 극값 중 하나가 5가 되어야 한다.

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2 = 3(x^2 + 2ax - 3a^2)$$

$$= 3(x + 3a)(x - a)$$

$$f'(x) = 0$$

에서 $x = -3a$ 또는 $x = a$

[2단계]

a 가 양수이므로 $x = -3a$ 에서 극댓값, $x = a$ 에서 극솟값을 갖는다.

직선 $y = 5$ 가 접하려면 극댓값 또는 극솟값이 5이어야 한다.

극솟값을 구하면

$$f(a) = a^3 + 3a \cdot a^2 - 9a^2 \cdot a + 4$$

$$= a^3 + 3a^3 - 9a^3 + 4 = -5a^3 + 4$$

극댓값을 구하면

$$f(-3a) = (-3a)^3 + 3a(-3a)^2 - 9a^2(-3a) + 4$$

$$= -27a^3 + 27a^3 + 27a^3 + 4 = 27a^3 + 4$$

[3단계]

극솟값 $-5a^3 + 4 = 5$ 이면 $a^3 = -\frac{1}{5}$ 이 되어 양수 a

조건에 맞지 않는다.

극댓값 $27a^3 + 4 = 5$ 이면 $27a^3 = 1$, 즉 $a^3 = \frac{1}{27}$ 이므로

$$a = \frac{1}{3}$$

[4단계]

$a = \frac{1}{3}$ 을 대입하여 $f(2)$ 를 구한다.

$$f(2) = 2^3 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^2$$

$$- 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2$$

$$+ 4 = 8 + 4 - 9 \cdot \frac{1}{9} \cdot 2 + 4$$

$$= 8 + 4 - 2 + 4 = 14$$

따라서 정답은 ㉔이다.

15. 정답 ㉕
[출제 주제] 함수의 연속

[1단계]

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

이므로 $x \geq 0$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는 꼭짓점이 (2, 1)인 포물선의 일부이고, $g(0) = 5$

$x < 0$ 에서는

$$g(x) = f(x + a) + b = (x + a - 2)^2 + 1 + b$$

이므로 꼭짓점의 x 좌표는 $2 - a$, 최솟값이 될 값은 $1 + b$

16. 정답 ㉔
[출제 주제] 공간도형

[1단계]

점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발이 H이므로

$$\overline{AH} \perp \overline{CD}$$

이때 $x \rightarrow 0^-$ 에서의 값은 5로 오른쪽 부분과 이어진다.

[2단계]

$x \geq 0$ 인 부분과 직선 $y = t$ 의 교점 개수는 꼭짓점 (2, 1)과 $g(0) = 5, g(4) = 5$ 에서

$t < 1$ 이면 0, $t = 1$ 이면 1, $1 \leq t \leq 5$ 의 내부와 $t = 5$ 에서는 2, $t > 5$ 이면 1

$x < 0$ 인 부분은 꼭짓점의 위치에 따라 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) $2 - a \geq 0$ 인 경우

$x < 0$ 에서 그래프는 감소만 하고 함숫값이 모두 5보다 크므로, $t = 1$ 이외에는 $h(t)$ 의 좌·우극한의 차가 2가 되는 곳이 없어 조건에 맞지 않는다.

(ii) $2 - a < 0$ 인 경우

$x < 0$ 에서 그래프는 $x = 2 - a$ 에서 최솟값 $1 + b$ 를 가지고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 한없이 커지며 $x \rightarrow 0^-$ 일 때 5에 가까워진다.

따라서 교점 개수는

$t < 1 + b$ 이면 0, $t = 1 + b$ 이면 1, $1 + b < t < 5$ 이면 2, $t \geq 5$ 이면 1

[3단계]

(ii)에서 $h(t)$ 의 좌·우극한이 2만큼 달라지는 곳은 $t = 1$ (오른쪽 부분에서 0에서 2로 변함), $t = 5$ (왼쪽·오른쪽 부분의 개수가 각각 하나씩 줄어 합이 4에서 2로 변함), 그리고 $t = 1 + b$ (왼쪽 부분에서 0에서 2로 변함)이다.

k 의 값이 1, 4, 5이므로

$$1 + b = 4, \text{ 즉 } b = 3$$

$b = 4a - a^2$ 이므로

$$4a - a^2 = 3$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$(a - 1)(a - 3) = 0$$

$$a = 1 \text{ 또는 } a = 3$$

$2 - a < 0$ 이어야 하므로 $a = 3, b = 3$

[4단계]

$x < 0$ 에서 $g(x) = f(x + 3) + 3$ 이므로

$$g(-4) = f(-1) + 3 = ((-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 5) + 3$$

$$= 10 + 3 = 13$$

따라서 정답은 ㉕이다.

16. 정답 ㉔
[출제 주제] 공간도형

[1단계]

점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발이 H이므로

$$\overline{AH} \perp \overline{CD}$$

두 평면 ABH와 BCD가 서로 수직이고 교선이 BH이므로,
평면 BCD 위의 직선 CD가 AH와 수직이면 CD는 평면 ABH와 수직이다.

따라서 $\overline{CD} \perp \overline{BH}$

$\triangle BCD$ 에서 $\overline{BC} = \overline{BD} = 2\sqrt{5}$ 이므로 이등변삼각형이고,
H는 CD의 중점이다.

$\overline{CD} = 4$ 이므로 $\overline{CH} = 2$ 이고, $\overline{BH} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$

$\overline{AB} = 4, \overline{AH} = 4, \overline{BH} = 4$ 이므로 $\triangle ABH$ 는 한 변의 길이가 4 인 정삼각형이다.

[2단계]

$\overline{CD} \perp$ 평면 ABH이므로 평면 ACD $\perp$ 평면 ABH이고, 두 평면의 교선은 AH

구 S는 중심이 G이고 평면 ACD 에 접하므로, 구의 반지름 r는 G에서 AH 까지의 거리와 같다.

$\triangle ABH$ 의 무게중심 G에서 AH 까지의 거리는 B에서 AH 까지의 거리의 $\frac{1}{3}$ 이므로 $r = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\angle APG = \frac{\pi}{2}$ 이므로 점 P는 선분 AG를 지름으로 하는 구와

구 S의 교선인 원을 나타낸다.

$\overline{AG} = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이고, 직각삼각형 APG에서

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{GP}^2}$
 $= \sqrt{\frac{16}{3} - \frac{4}{3}} = 2$

도형 T는 AG 에 수직인 평면 위에 있는 원이며, 그 반지름은

P에서 AG 에 내린 수선의 길이인

$\frac{\overline{AP} \cdot \overline{GP}}{\overline{AG}} = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = 1$

따라서 도형 T의 넓이는 π

[3단계]

도형 T가 포함된 평면은 선분 AG와 수직이므로, 이 평면과 평면 ABC가 이루는 각 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 는 선분 AG와 평면 ABC가 이루는 각을 ϕ 라 할 때 $\sin \phi$ 와 같다.

점 G에서 평면 ABC 에 내린 수선의 길이를 d 라 하면

$\sin \phi = \frac{d}{\overline{AG}}$

사면체 C - ABG의 부피를 두 가지 방법으로 구하여 d 를 찾는다.

$\overline{CH} \perp$ 평면 ABH이므로 사면체 C - ABG의 부피는

$\frac{1}{3} \times (\triangle ABG \text{의 넓이}) \times \overline{CH}$

$\triangle ABG$ 의 넓이는 $\triangle ABH$ 의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 인 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이므로

부피는 $\frac{1}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

한편, $\triangle ACH$ 에서 $\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AC} = \overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 인 이등변삼각형이다.

C에서 AB 에 내린 수선의 발을 N 이라 하면

$\overline{CN} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$ 이므로 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

사면체 G - ABC의 부피는 $\frac{1}{3} \times 8 \times d = \frac{8}{3}d$ 이므로

$\frac{8}{3}d = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ 에서 $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\cos \theta = \frac{d}{\overline{AG}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$
 $= \frac{1}{4}$

도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$

따라서 정답은 ㉔이다.

17.

[출제 주제] 부정적분과 정적분

[1단계]

함수 $f(x)$ 의 부정적분 $F(x)$ 를 구한다.

$F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 - 3x^2 + 2) dx$
 $= x^4 - x^3 + 2x + C$ (단,C는 적분상수)

[2단계]

조건 $F(1) = 5$ 를 이용하여 적분상수 C의 값을 구한다.

$F(1) = 1^4 - 1^3 + 2 \cdot 1 + C = 2 + C$

$2 + C = 5$ 이므로

$C = 3$

따라서 $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$

[3단계]

$F(2)$ 의 값을 구한다.

$F(2) = 2^4 - 2^3 + 2 \cdot 2 + 3 = 16 - 8 + 4 + 3 = 15$

따라서 정답은 15

18.

[출제 주제] 부정적분과 정적분

[1단계]

양변의 정적분을 한쪽으로 모아 하나의 정적분으로 정리한다.

$\int_0^a (4x^2 - 3x) dx - \int_0^a (x^2 + x) dx = 0$

적분 구간이 같으므로 피적분함수끼리 뺄 수 있다.

$\int_0^a \{(4x^2 - 3x) - (x^2 + x)\} dx$
 $= \int_0^a (3x^2 - 4x) dx = 0$

[2단계]

미적분학의 기본정리를 이용하여 정적분을 계산한다.

$\int_0^a (3x^2 - 4x) dx$
 $= \left[x^3 - 2x^2 \right]_0^a$
 $= a^3 - 2a^2$

[3단계]

$a^3 - 2a^2 = 0$ 을 풀어 a의 값을 구한다.

$a^2(a - 2) = 0$

$a = 0$ 또는 $a = 2$

a는 양수이므로 $a = 2$

따라서 정답은 2

19.

[출제 주제] 삼각함수

[1단계]

$\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5} < 0$ 이므로 $\angle BAC$ 는

둔각이고, $\sin(\angle BAC) > 0$

$\sin^2(\angle BAC)$
 $= 1 - \cos^2(\angle BAC)$

$= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\sin(\angle BAC) = \frac{4}{5}$

[2단계]

두 변 $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 6$ 과 그 끼인각 $\angle BAC$ 를 이용하면

$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin(\angle BAC)$
 $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 12$

따라서 정답은 12

20.

[출제 주제] 소인수분해

[1단계]

부피 조건에서 $abc = 33$ 이고 $33 = 3 \cdot 11$ 이므로 세 자연수 a, b, c 의 순서를 생각하지 않으면 가능한 조합은 {1, 1, 33} 또는 {1, 3, 11}

[2단계]

각 경우의 세 수의 합을 구한다.

(i) {1, 1, 33} 일 때 $1 + 1 + 33 = 35 = 7 \cdot 5$ 이므로 7의 배수이다.

(ii) {1, 3, 11} 일 때 $1 + 3 + 11 = 15$ 이므로 7의 배수가 아니다.

따라서 세 모서리의 길이는 1, 1, 33

[3단계]

직육면체의 겉넓이는 $2(ab + bc + ca)$ 이므로

$2(1 \cdot 1 + 1 \cdot 33 + 33 \cdot 1)$
 $= 2(1 + 33 + 33) = 2 \cdot 67 = 134$

따라서 정답은 134

21.

[출제 주제] 지수함수와 로그함수

[1단계]

점 A(a, b)가 곡선 $y = \log_{16}(8x + 2)$ 위에 있으므로

$16^b = 8a + 2$

즉 $2^{4b} = 8a + 2$

단답형

단답형

단답형

[2단계]

점 A를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(b, a)$ 이므로 직선 OB는 원점과 (b, a) 를 지나는 직선이다.

이 직선 위의 점 $(2b, 2a)$ 가 곡선 $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$ 위에

있는지 확인하면

$$4^{2b-1} - \frac{1}{2} = 2^{4b-2} - \frac{1}{2} = \frac{8a+2}{4} - \frac{1}{2} = 2a$$

따라서 점 $(2b, 2a)$ 는 곡선 $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$ 위에 있다.

곡선 $y = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$ 는 아래로 볼록하고 y 절편이 $-\frac{1}{4}$

이므로 원점을 지나는 직선과 제 1 사분면에서 오직 한 점에서 만난다.

따라서 B($2b, 2a$)

[3단계]

선분 AB의 중점의 좌표에서

$$\frac{a+2b}{2} = \frac{77}{8}, \frac{b+2a}{2} = \frac{133}{8}$$

$$\text{즉 } a+2b = \frac{77}{4}, 2a+b = \frac{133}{4}$$

두 식을 더하면 $3(a+b) = \frac{210}{4}$ 이므로 $a+b = \frac{35}{2}$

두 식을 빼면 $a-b = 14$

$$\text{따라서 } a = \frac{63}{4}, b = \frac{7}{4}$$

[4단계]

$$a \times b = \frac{63}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{441}{16}$$

$p = 16, q = 441$ 이므로 $p+q = 457$

따라서 정답은 457

22. 단답형

[출제 주제] 여러 가지 함수의 미분

[1단계]

선분 AB가 지름이므로 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 ABP에서 $\overline{AP} = \overline{AB} \cos \theta = 2 \cos \theta$

따라서 $\overline{PM} = \frac{1}{2} \overline{AP} = \cos \theta$

[2단계]

$f(\theta)$ 는 삼각형 PQM의 넓이이므로 $\angle QPM$ 을 구한다.

원주각을 이용한다. 원의 중심을 O 라 하면 호 PQ에 대한 중심각과 관련된다.

$\overline{PQ} = 1$ 이고 반지름은 1이므로 삼각형 OPQ는

정삼각형이며, 호 PQ에 대한 중심각은 $\frac{\pi}{3}$

현 QA에 대해서, $\angle QPA$ 는 호 QA에 대한 원주각이다.

호 AP에 대한 원주각은 $\angle ABP = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 호 AP의

중심각은 $\pi - 2\theta$

호 QP의 중심각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 호 QA의 중심각은

$$(\pi - 2\theta) - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 2\theta$$

따라서 $\angle QPA$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta \right) = \frac{\pi}{3} - \theta$$

점 M은 선분 AP 위에 있으므로

$$\angle QPM = \angle QPA = \frac{\pi}{3} - \theta$$

[3단계]

삼각형 PQM에서 $\overline{PQ} = 1, \overline{PM} = \cos \theta$, 끼인각

$$\angle QPM = \frac{\pi}{3} - \theta \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{PM} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \end{aligned}$$

[4단계]

곱의 미분법을 이용한다.

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{1}{2} \left[-\sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta \cdot \left(-\cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right) \right] f'(\theta) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right] \text{코사인 덧셈정리에 의해 대괄호} \\ &\quad \text{안은 } \cos \left(\theta - \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right) \\ &= \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = -\frac{1}{2} \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right)$$

[5단계]

$$\overline{AP} = \frac{6}{5} \text{이므로 } 2 \cos \alpha = \frac{6}{5}, \text{ 즉 } \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} &\cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}, \sin 2\alpha = 2 \\ &= 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25} \\ &\cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{24}{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{7}{50} + \frac{12\sqrt{3}}{25} \end{aligned}$$

[6단계]

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{7}{50} + \frac{12\sqrt{3}}{25} \right) \\ &= \frac{7}{100} - \frac{6\sqrt{3}}{25} \\ \text{따라서 } p &= \frac{7}{100}, q = -\frac{6}{25} = -\frac{24}{100} \text{이므로} \\ p+q &= \frac{7}{100} - \frac{24}{100} = -\frac{17}{100} \\ 100 \times |p+q| &= 100 \times \frac{17}{100} = 17 \end{aligned}$$

따라서 정답은 17

23. 단답형

[출제 주제] 수열의 극한

[1단계]

P, Q가 각각 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 의 중점이므로 중점연결정리에 의해 $\overline{PQ}$ 는 $\overline{AC}$ 와 평행하다.

따라서 직선 QR를 가로지르는 선으로 보면 엇각에 의해

$$\angle PQR = \angle QRC \text{이고, 조건에서 } \angle QRC = \angle CAB$$

$\triangle CRQ$ 와 $\triangle CAB$ 에서 $\angle RCQ$ 는 공통이고

$\angle CRQ = \angle CAB$ 이므로 두 삼각형은 닮음이다.

$\overline{CQ} : \overline{CB} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{CR} : \overline{CA} = 1 : 2$, 즉 R는 선분 AC의 중점이고 $\overline{CR} = 2n+1$

[2단계]

$\overline{CA} = \overline{CB}$ 이므로 $\overline{CP} \perp \overline{AB}$ 이고

$$\begin{aligned} &\overline{BP}^2 \\ &= \overline{BC}^2 - \overline{CP}^2 \\ &= (4n+2)^2 - (15n^2+16n+4) = n^2 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} = \overline{BP} = n$ 이고

$$\begin{aligned} &\cos(\angle CAB) \\ &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{n}{4n+2} \end{aligned}$$

[3단계]

D, R, Q가 한 직선 위에 있으므로 $\angle DRC$

$$= 180^\circ - \angle QRC$$

$$= 180^\circ - \angle CAB$$

$\overline{DR} = x$ 라 하면 $\overline{DC} = 2x$ 이므로 $\triangle DRC$ 에서

코사인법칙에 의해

$$(2x)^2 = x^2 + (2n+1)^2 + 2x(2n+1) \cos(\angle CAB)$$

$$2(2n+1) \cdot \frac{n}{4n+2} = n \text{이므로}$$

$$3x^2 - nx - (2n+1)^2 = 0$$

$x > 0$ 이므로

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 12(2n+1)^2}}{6} = \frac{n + \sqrt{49n^2 + 48n + 1}}{6}$$

[4단계]

$$\begin{aligned} \overline{DR} - \frac{4}{3}n &= \frac{n + \sqrt{49n^2 + 48n + 1} - 8n}{6} \\ &= \frac{\sqrt{49n^2 + 48n + 1} - 7n}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{49n^2 + 48n + 1} - 7n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{48n + 1}{\sqrt{49n^2 + 48n + 1} + 7n} = \frac{48}{14} \\ &= \frac{24}{7} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\overline{DR} - \frac{4}{3}n \right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{24}{7} = \frac{4}{7}$$

$p = 7, q = 4$ 이므로 $p+q = 11$

따라서 정답은 11

24. 단답형

[출제 주제] 이차곡선

[1단계]

포물선의 정의에 의해 포물선 위의 점 **P**에서 초점 **F** 까지의 거리와 준선 $x = -p$ 까지의 거리는 같다.

즉, $\overline{PF} = \overline{PH}$

점 **P**는 중심이 **F**이고 반지름의 길이가 r 인 원 C 위의 점이므로 $\overline{PF} = r$

따라서 $\overline{PH} = r$

[2단계]

삼각형 **PHF**에서 코사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\overline{PF}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HF}^2 - 2 \cdot \overline{PH} \cdot \overline{HF} \cdot \cos(\angle PHF)$$

$$r^2 = r^2 + \overline{HF}^2 - 2 \cdot r \cdot \overline{HF} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{HF}^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}r\overline{HF} = 0$$

$$\overline{HF} > 0 \text{이므로 } \overline{HF} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

점 **P**의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면, 점 **H**의 좌표는 $(-p, y_1)$ 이고 초점 **F**의 좌표는 $(p, 0)$

$$\overline{PH} = x_1 - (-p) = x_1 + p = r \text{이므로 } x_1 = r - p$$

점 **P**는 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} y_1^2 &= 4px_1 \\ &= 4p(r - p) \end{aligned}$$

두 점 사이의 거리 공식을 통해 $\overline{HF}^2$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{HF}^2 &= (-p - p)^2 + (y_1 - 0)^2 \\ &= 4p^2 + 4p(r - p) \\ &= 4pr \end{aligned}$$

앞서 구한 $\overline{HF}$ 의 값을 대입하면 다음과 같다.

$$4pr = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2$$

$$4pr = \frac{4}{3}r^2$$

$$r > 0 \text{이므로 양변을 } r \text{로 나누어 정리하면 } r = 3p$$

[3단계]

점 **A**는 중심이 $(p, 0)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원 C 가 x 축과 만나는 점 중 x 좌표가 양수인 점이므로 $A(p + r, 0)$

$$\text{선분 AF의 길이는 } (p + r) - p = r$$

선분 **PH**는 x 축에 평행하고 그 길이가 r 이므로, 사각형 **APHF**는 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 평행사변형이다.

평행사변형 **APHF**의 높이는 점 **P**의 y 좌표인 y_1

$$r = 3p \text{이므로 } x_1 = 3p - p = 2p \text{이고,}$$

$$y_1^2 = 4p(2p) = 8p^2$$

$$\text{점 P는 제 1 사분면의 점이므로 } y_1 = 2\sqrt{2}p$$

사각형 **APHF**의 넓이는 밑변의 길이와 높이의 곱이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{AF} \times y_1 &= r \times 2\sqrt{2}p \\ &= 3p \times 2\sqrt{2}p \\ &= 6\sqrt{2}p^2 \end{aligned}$$

주어진 사각형 **APHF**의 넓이가 $54\sqrt{2}$ 이므로

다음이 성립한다.

$$6\sqrt{2}p^2 = 54\sqrt{2}$$

$$p^2 = 9$$

$$p > 0 \text{이므로 } p = 3$$

$$r = 3p = 9 \text{이므로 } p + r = 3 + 9 = 12$$

따라서 정답은 12

25.

[출제 주제] 확률분포

[1단계]

기록한 수가 3 일 확률 p 를 구한다.

주사위 눈이 a 이하일 확률은 $\frac{a}{6}$ 이고, 이때 동전 5 번 중

$$\text{앞면이 3 번 나올 확률은 } {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$$

주사위 눈이 a 보다 클 확률은 $\frac{6-a}{6}$ 이고, 이때 동전 3 번

$$\text{모두 앞면일 확률은 } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } p &= \frac{a}{6} \cdot \frac{10}{32} + \frac{6-a}{6} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{5a + 2(6-a)}{96} = \frac{3a + 12}{96} = \frac{a + 4}{32} \end{aligned}$$

[2단계]

X 는 이항분포 $B(19200, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 19200p = 4800$$

$$\text{즉 } p = \frac{1}{4} \text{이므로 } \frac{a + 4}{32} = \frac{1}{4}$$

$$a + 4 = 8, a = 4$$

[3단계]

$$V(X) = 19200 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 3600 \text{이므로 표준편차는 } 60$$

19200은 충분히 크므로 X 는 정규분포 $N(4800, 60^2)$ 을

$$\text{따르고, } Z = \frac{X - 4800}{60} \text{은 표준정규분포를 따른다.}$$

$$4800 + 30a = 4800 + 120 \text{이므로}$$

$$P(X \leq 4920)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{4920 - 4800}{60}\right)$$

$$= P(Z \leq 2)$$

$$P(Z \leq 2) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.477 = 0.977$$

[4단계]

$$k = 0.977 \text{이므로 } 1000 \times k = 977$$

따라서 정답은 977

26.

[출제 주제] 순열과 조합

[1단계]

함수 f 의 치역이 A , 합성함수 $f \circ f$ 의 치역이 B 이므로 $B \subset A$

조건 (나)에서 집합 A 의 모든 원소의 곱은 집합 B 의 모든 원소의 곱의 2 배이므로, A 의 원소 중 B 에 속하지 않는 원소들의 곱은 2

집합 X 의 원소는 모두 소수이므로 $A \setminus B = \{2\}$

따라서 $2 \notin B$ 이고 $A = B \cup \{2\}$

단답형

[2단계]

조건 (가)에서 $n(B) = 2$ 이므로 집합 B 는

$X \setminus \{2\} = \{3, 5, 7, 11\}$ 의 원소 중 2 개를 선택하여 만들 수 있다.

집합 B 를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

집합 B 가 결정되면 집합 A 도 $A = B \cup \{2\}$ 로

유일하게 결정된다.

[3단계]

집합 $B = \{a, b\}$ 라 하면 $A = \{2, a, b\}$

함수 f 의 치역이 A 이므로 X 의 모든 원소는 2, a, b 중 하나에 대응되어야 한다.

또한 $f \circ f$ 의 치역이 B 이므로 $f(A) = B$ 이어야 한다.

정의역 A 의 세 원소 2, a, b 가 공역 $B = \{a, b\}$ 로 대응될 때 치역이 B 가 되는 경우의 수는

$$2^3 - 2 = 6$$

집합 $X \setminus A$ 의 두 원소를 c, d 라 하자.

함수 f 의 치역이 A 가 되려면 $f(c)$ 와 $f(d)$ 중 적어도 하나는 2 에 대응되어야 한다.

c, d 가 A 의 원소로 대응되는 전체 경우의 수에서 2 에 대응되지 않는 경우의 수를 빼면

$$3^2 - 2^2 = 5$$

따라서 하나의 집합 B 에 대하여 조건을 만족하는 함수 f 의 개수는

$$6 \cdot 5 = 30$$

[4단계]

집합 B 를 정하는 경우의 수가 6이므로 구하는 함수 f 의 총 개수는

$$6 \cdot 30 = 180$$

따라서 정답은 180

27.

[출제 주제] 급수

[1단계]

공비가 $-\frac{1}{2}$ 이고 첫째항을 a (자연수)라 하면

$$a_n = a \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$|a_n + 1| - a_n - 1$ 의 값은 $a_n + 1 \geq 0$ 이면 0, $a_n + 1 < 0$ 이면 $-2(a_n + 1)$

따라서 $a_n < -1$ 인 항들만 합에 기여하므로

$$\sum -2 \cdot (a_n + 1) = 26$$

$$\sum (-a_n - 1) = 13$$

[2단계]

$a > 0$ 이므로 $a_n < 0$ 인 것은 n 이 짝수일 때이고, 이때

$$a_n = -\frac{a}{2^{n-1}}$$

단답형

$a_n < -1$ 은 $\frac{a}{2^{n-1}} > 1$, 즉 $2^{n-1} < a$ 와 같으므로 조건을

만족하는 짝수 n 에 대하여

$$\sum \left(\frac{a}{2^{n-1}} - 1 \right) = 13$$

[3단계]

기여하는 짝수 n 의 개수에 따라 경우를 나눌 수 있다.

(i) $n = 2$ 뿐인 경우

$\frac{a}{2} - 1 = 13$ 에서 $a = 28$ 이지만, 이때 $2^3 = 8 < 28$ 이므로

$n = 4$ 도 조건을 만족하여 모순이다.

(ii) $n = 2, 4$ 인 경우

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{8} - 2 = 13$$

$$\frac{5a}{8} = 15$$

$$a = 24$$

이때 $2^3 = 8 < 24, 2^5 = 32 > 24$ 이므로 실제로 $n = 2, 4$ 만 조건을 만족하여 적합하다.

(iii) $n = 2, 4, 6$ 인 경우

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{8} + \frac{a}{32} - 3 = 13$$

$$\frac{21a}{32} = 16$$

에서 a 가 자연수가 아니므로 적합하지 않다.

[4단계]

$a = 24$, 공비 $-\frac{1}{2}$ 이고 $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{24}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)}$$
$$= \frac{24}{\frac{3}{2}} = 16$$

따라서 정답은 16

28. 단답형
[출제 주제] 여러 가지 미분법

[1단계]

$g(k) = 0$ 인 k 의 값 구하기

f 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이고 역함수 g 를 가지므로 f 는 증가함수이고, g 도 증가함수이다.

$x \neq k$ 이면 $g(x) \neq 0$ 이므로 $h(x) = \frac{x \ln (1+3|g(x)|)}{g(x)}$

$x \rightarrow k$ 일 때 $g(x) \rightarrow 0$ 이고 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln (1+3|t|)}{3|t|} = 1$ 이므로

$x \rightarrow k+$ 이면 $g(x) > 0$ 이어서 $\lim_{x \rightarrow k+} h(x) = 3k$

$x \rightarrow k-$ 이면 $g(x) < 0$ 이어서 $\lim_{x \rightarrow k-} h(x) = -3k$

$h(x) - |g(x)|$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하려면 연속이어야 하므로 $3k = -3k$, 즉 $k = 0$

따라서 $g(0) = 0, f(0) = 0$ 이고 $h(0) = 0$

[2단계]

$x = 0$ 에서의 미분가능 조건으로 $f'(0)$ 구하기

$H(x) = h(x) - |g(x)|$ 라 하면 $H(0) = 0$ 이고

$$\frac{H(x) - H(0)}{x} = \frac{\ln (1+3|g(x)|)}{g(x)} - \frac{|g(x)|}{x}$$

$x \rightarrow 0+$ 일 때 $g(x) > 0$ 이므로 우미분계수는 $3 - g'(0)$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $g(x) < 0$ 이므로 좌미분계수는 $-3 + g'(0)$

두 값이 같아야 하므로 $g'(0) = 3$, 즉 $f'(0) = \frac{1}{3}$

[3단계]

조건 (나)를 이용하여 $f(x)$ 결정하기

$f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{3}$ 이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}x$

$f(1) = a + \frac{4}{3}, f'(1) = 3 + 2a + \frac{1}{3} = 2a + \frac{10}{3}$

$g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}$ 이므로 조건 (나)에서

$$\frac{4}{2a + \frac{10}{3}} = 3 \left(a + \frac{4}{3} \right) - 4 = 3a$$

$$3a \left(2a + \frac{10}{3} \right) = 4$$

$$6a^2 + 10a - 4 = 0$$

$$3a^2 + 5a - 2 = 0$$

$$(3a - 1)(a + 2) = 0$$

$a = \frac{1}{3}$ 또는 $a = -2$

[4단계]

조건에 맞는 a 를 택하고 $f(3)$ 계산하기

f 가 역함수를 가지려면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + \frac{1}{3} \geq 0$

이어야 하므로 판별식에서 $4a^2 - 4 \leq 0$, 즉 $-1 \leq a \leq 1$

따라서 $a = \frac{1}{3}$ 이고 $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

$f(3) = 27 + 3 + 1 = 31$

따라서 정답은 31

29. 단답형
[출제 주제] 도함수의 활용

[1단계]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하는

연속함수이므로, 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수이다.

조건 (가)에서 $|x| \leq 1$ 일 때 $4(f^{-1}(x))^2 = x^2(x^2 - 5)^2$

이므로 $f^{-1}(x) = \pm \frac{1}{2}x(x^2 - 5)$

$h(x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 5)$ 라 하면 $h'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2} < 0$

$(-1 \leq x \leq 1)$ 이므로 $h(x)$ 는 감소함수이다.

$f^{-1}(x)$ 는 증가함수이어야 하므로

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x(x^2 - 5) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x$

조건 (나)에서 $|x| > 1$ 일 때 $|f^{-1}(x)| = e^{|x|-1} + 1$

$f^{-1}(1) = 2$ 이고 $f^{-1}(-1) = -2$ 이므로 연속성에 의해

$x > 1$ 일 때 $f^{-1}(x) = e^{x-1} + 1$ 이고, $x < -1$ 일 때

$f^{-1}(x) = -e^{-x-1} - 1$

[2단계]

직선 $y = m(x - 1)$ 과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 개수 $g(m)$

은 $x = \frac{1}{m}y + 1$ 과 $x = f^{-1}(y)$ 의 교점의 개수와 같다. (단, $m \neq 0$)

$m = 0$ 일 때, $y = 0$ 과 $y = f(x)$ 의 교점은 $f(x) = 0$ 즉 $x = f^{-1}(0) = 0$ 하나뿐이므로 $g(0) = 1$

$m \neq 0$ 일 때, 변수 y 를 t 로 바꾸고 $K = \frac{1}{m}$ 이라 하면,

$g(m)$ 은 곡선 $y = f^{-1}(t)$ 와 직선 $y = Kt + 1$ 의

교점의 개수이다.

직선 $y = Kt + 1$ 은 항상 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

[3단계]

$t > 0$ 구간에서 곡선은 $t \in (0, 1]$ 일 때 $y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t$

(위로 볼록)이고, $t > 1$ 일 때 $y = e^{t-1} + 1$ (아래로

볼록)이다.

$t = 1$ 에서 접선의 방정식은 $y = t + 1$

$K > 0$ 일 때, 직선 $y = Kt + 1$ 은 $t > 0$ 구간에서 곡선과 항상 오직 1 개의 교점을 가진다.

$t \leq 0$ 구간에서 곡선은 $t \in [-1, 0]$ 일 때 $y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t$

이고, $t < -1$ 일 때 $y = -e^{-t-1} - 1$ (위로 볼록)이다.

직선 $y = Kt + 1$ 이 $t < -1$ 구간의 곡선에 접할 때의 접점을 $k < y < -e^{-k-1} - 1$ 이라 하자.

접선의 방정식은 $y = e^{-k-1}(t - k) - e^{-k-1} - 1$ 이고, 이 직선이 $(0, 1)$ 을 지나므로 다음이 성립한다.

$1 = -ke^{-k-1} - e^{-k-1} - 1$

$2 = -(k + 1)e^{-k-1}$

이때 접선의 기울기를 K_1 이라 하면 $K_1 = e^{-k-1}$

양변에 자연로그를 취하면 $\ln K_1 = -k - 1$

이를 위 식에 대입하면 $2 = K_1 \ln K_1$

따라서 $K > 0$ 일 때 $t \leq 0$ 구간에서의 교점의 개수는

$0 < K < K_1$ 일 때 0 개, $K = K_1$ 일 때 1 개, $K > K_1$ 일 때 2 개이다.

$K \leq 0$ 일 때는 전체 구간에서 교점이 1 개이다.

[4단계]

전체 교점의 개수 $g(m)$ 을 m 의 범위에 따라 구하면 다음과 같다.

$m < 0$ 일 때 $K < 0$ 이므로 $g(m) = 1$

$m = 0$ 일 때 $g(0) = 1$

$0 < m < \frac{1}{K_1}$ 일 때 $K > K_1$ 이므로 $g(m) = 1 + 2 = 3$

$m = \frac{1}{K_1}$ 일 때 $K = K_1$ 이므로 $g(m) = 1 + 1 = 2$

$m > \frac{1}{K_1}$ 일 때 $0 < K < K_1$ 이므로 $g(m) = 1 + 0 = 1$

따라서 함수 $g(m)$ 은 $m = 0$ 과 $m = \frac{1}{K_1}$ 에서 불연속이므로

$a = 0, b = \frac{1}{K_1}$

$g(a) = g(0) = 1$ 이고, $\lim_{m \rightarrow 0+} g(m) = 3$

$$g(b) = g\left(\frac{1}{K_1}\right) = 2^{\circ}\text{고}, \frac{\ln b}{b} = K_1 \ln\left(\frac{1}{K_1}\right)$$

$$= -K_1 \ln K_1 = -2$$

구하는 값은 $1 \times (3 + 2 \times (-2)^2) = 1 \times (3 + 8) = 11$

따라서 정답은 11

30.

단답형

[출제 주제] 여러 가지 적분법

[1단계]

주어진 식 $f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{1 + xf'(x)}\right)$ 의 양변을 지수

형태로 바꾸면

$$e^{f(x)} = \frac{g(x)}{1 + xf'(x)}$$

$$g(x) = e^{f(x)} + xf'(x)e^{f(x)}$$

이때 우변은 $xe^{f(x)}$ 의 도함수와 같으므로

$$g(x) = (xe^{f(x)})'$$

[2단계]

$\int_1^2 g(x)dx = 34$ 를 이용하여 $e^{f(2)}$ 의 값을 구한다.

$$\int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 (xe^{f(x)})' dx$$

$$= \left[xe^{f(x)} \right]_1^2$$

$$= 2e^{f(2)} - e^{f(1)}$$

$f(1) = 4 \ln 2 = \ln 16$ 이므로 $e^{f(1)} = 16$

$$2e^{f(2)} - 16 = 34$$

$$2e^{f(2)} = 50$$

$$e^{f(2)} = 25$$

[3단계]

부분적분법을 이용하여 $\int_1^2 xe^{f(x)}dx$ 의 값을 구한다.

$$\int_1^2 xg(x)dx = \int_1^2 x(xe^{f(x)})' dx$$

부분적분법에 의해

$$\int_1^2 x(xe^{f(x)})' dx$$

$$= \left[x^2e^{f(x)} \right]_1^2 - \int_1^2 xe^{f(x)} dx$$

$$= 4e^{f(2)} - e^{f(1)} - \int_1^2 xe^{f(x)} dx$$

$$= 4 \cdot 25 - 16 - \int_1^2 xe^{f(x)} dx$$

$$= 84 - \int_1^2 xe^{f(x)} dx$$

주어진 조건에서 $\int_1^2 xg(x)dx = 53$ 이므로

$$53 = 84 - \int_1^2 xe^{f(x)} dx$$

$$\int_1^2 xe^{f(x)} dx = 84 - 53 = 31$$

따라서 정답은 31